Gegenüber dem, was ich im letzten Forumsbeitrag geschrieben habe, ergeben sich folgende Änderungen: Erstens haben Sie in Ihrem Rechenbeispiel eine Raumdimension unterdrückt. Deshalb ist unser Modell nicht ein vier-, sondern ein dreidimensionaler affiner $\mathbb{R}$-Vektorraum. Die Bilinearform auf diesem Raum hat Signatur $(1,2)$ statt $(1,3)$. Zweitens sind bei Ihnen die Längenangaben nicht auf Lichtsekunden normiert. Anstelle von $\operatorname{diag}(-1,-1,1)$ ist unsere Bilinearform bezüglich der Einheitsbasis deshalb durch die Darstellungsmatrix

$$G := \operatorname{diag}(-1,-1,c^2)$$

gegeben. (Ein weiterer, unwichtiger Punkt: Bei mir war die Zeitkoordinate an erster Stelle, in Ihrer Notation ist sie an die dritte Position gerückt.) In der Eile haben Sie vergessen, die Bewegungsrichtung des zweiten Beobachters anzugeben. Ich gehe davon aus, dass er sich in x-Richtung mit Geschwindigkeit $v = \frac{1}{2}c$ bewegt.

Sei $\mathcal{K}$ das Koordinatensystem des ruhenden Beobachters, das durch die Einheitsbasis

$$e_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad e_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad e_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

gegeben ist. Das Koordinatensystem $\mathcal{K}'$ des mit Geschwindigkeit $v = \beta c$ $(0 \leq \beta < 1)$ in x-Richtung bewegten Beobachters wird durch die Basisvektoren

$$e_1' := \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\beta}{c} \end{pmatrix} \quad , \quad e_2' := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad e_3' := \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \begin{pmatrix} \beta c \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

definiert. Also werden durch die Transformationsmatrix

$$U := \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \beta c \\ 0 & \sqrt{1-\beta^2} & 0 \\ \frac{\beta}{c} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Koordinaten bezüglich $\mathcal{K}'$ in $\mathcal{K}$-Koordinaten umgerechnet. Die umgekehrte Transformation von $\mathcal{K}$- in $\mathcal{K}'$-Koordinaten erhält man durch die inverse Matrix

$$T := U^{-1} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\beta c \\ 0 & \sqrt{1-\beta^2} & 0 \\ -\frac{\beta}{c} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Für $\beta = 0$ ist dies die Einheitsmatrix. Man beachte, dass T eine Isometrie bezüglich unserer indefiniten Bilinearform G ist, denn es gilt

$${}^{\mathrm{t}}TGT = G.$$

wobei ${}^{\mathrm{t}}T$ die transponierte Matrix bezeichnet. Die Raum-Zeit-Bewegung des zweiten Beobachters wird in $\mathcal{K}$ durch den Vektor $v := {}^{\mathrm{t}}(\beta c, 0, 1)$ beschrieben. Wenn die Umrechnungsmatrix T korrekt ist, dann entsteht durch die Transformation ein Vektor mit Nullen in den ersten beiden Komponenten, denn bezüglich $\mathcal{K}'$ bewegt sich der zweite Beobachter nur in der Zeit, nicht aber im Raum. Tatsächlich gilt

$$T \begin{pmatrix} \beta c \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \sqrt{1-\beta^2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Wir verwenden nun die Matrix T, um die von Ihnen angegebenen Punkte

$$v_1 := \begin{pmatrix} c \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad v_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ c \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad v_3 := \begin{pmatrix} -c \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad v_4 := \begin{pmatrix} 0 \\ -c \\ 1 \end{pmatrix}$$

von $\mathcal{K}$- in $\mathcal{K}'$-Koordinaten umzurechnen. Einsetzen von $\beta := \frac{1}{2}$ liefert

$$T = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{c}{\sqrt{3}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{3}c} & 0 & \frac{2}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

Wir erhalten

$$v_1' := Tv_1 = \begin{pmatrix} \frac{c}{\sqrt{3}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \quad , \qquad v_2' := Tv_2 = \begin{pmatrix} -\frac{c}{\sqrt{3}} \\ c \\ \frac{2}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

und

$$v_3' := Tv_3 = \begin{pmatrix} -\sqrt{3}c \\ 0 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} \quad , \qquad v_4' := Tv_4 = \begin{pmatrix} -\frac{c}{\sqrt{3}} \\ -c \\ \frac{2}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} .$$